Jeudi 15 janvier 2014 **Examen**

DURÉE : 3 HEURES.

Documents, calculettes et portables sont strictement prohibés.
Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Barème indicatif.

Dans tout ce qui suit, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, est muni de sa topologie d'espace vectoriel normé.

Exercice 1 (*3 points*)**.** On note ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées à valeurs réelles et, pour tout $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$,

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞.
2. Soit $u = (u_k) \in \ell^\infty$. On note $S(u)$ la suite telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S(u)_k = u_{k+1}$.
   (a) Montrer que S définit un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de ℓ^∞.
   (b) Vérifier que S est continu sur $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
   (c) Calculer la norme d'application linéaire de S (relativement à $\|\cdot\|_\infty$).

Exercice 2 (*7 points*)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que, sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, est défini le produit scalaire usuel noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tel que, pour tout $u = (u_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ et $v = (v_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} u_j v_j,$$

aussi noté ${}^t u v$, lorsque les vecteurs u et v sont identifiés à des matrices de n lignes et une colonne.

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille n, $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur et $c \in \mathbb{R}$ une constante réelle, de sorte que l'on définisse l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c = {}^t x A x + {}^t b x + c.$$

1. On suppose $n = 1$. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (resp. strictement) convexe.
2. On suppose que $n = 2$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, exprimer explicitement $f(x)$ et en déduire $\nabla f(x)$ et $Hf(x)$. À quelle condition f est-elle (resp. strictement) convexe ?
3. On suppose dorénavant $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprimer simplement l'incrément $f(x+h) - f(x)$. En déduire l'expression de $df(x)$, puis de $\nabla f(x)$.
4. Calculer $Hf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (resp. strictement) convexe.
6. Dans le cas où f est strictement convexe, montrer que f admet un unique minimum qu'on explicitera (ainsi que le point auquel il est atteint).
7. Supposons ici que $n = 2$ et que
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Discuter, suivant les valeurs de $b \in \mathbb{R}^2$ et $c \in \mathbb{R}$, l'existence, l'unicité et la valeur des minima de f sur $\mathbb{R}^2$ (ainsi que le(s) point(s) au(x)quel(s) il(s) est(sont) atteint(s)).

Exercice 3 (MAXIMISER LA PRODUCTION SOUS CONTRAINTE DE COÛT, *6 points*). On rappelle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul ($\mathbb{N}_n^* = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$), $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ un n-uplet de réels strictement positifs, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet de réels et $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ une constante strictement positive. Sont ainsi définis la fonction $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n$,

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

et l'ensemble $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$ tel que

$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma} = \left\{ (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n} \in \mathbb{R}_+^n \;\middle|\; \sum_{j=1}^n \beta_j x_j = \gamma \right\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer l'existence et la valeur de maximum(a) de $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ sur $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$.

1. Montrer que si $\beta_j \leqslant 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, alors $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma} = \emptyset$.
2. On suppose ici qu'il existe $j_0 \in \mathbb{N}_n^*$ tel que $\beta_{j_0} > 0$ et $j_1 \in \mathbb{N}_n^*$ tel que $\beta_{j_1} \leqslant 0$. Montrer que $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$ n'est ni vide ni borné. En déduire que $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ n'est pas bornée sur $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$.

   On suppose désormais que $\beta_j > 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_n^*$.
3. Montrer que $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$ est borné et en déduire que $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ admet un maximum fini sur $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$.

   Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$ en lequel $f_{\boldsymbol{\alpha}}$ atteint son maximum sur $\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$, i.e. $f_{\boldsymbol{\alpha}}(a) = \max_{x\in\mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}} f_{\boldsymbol{\alpha}}(x)$.
4. Montrer que $f_{\boldsymbol{\alpha}}(a) > 0$ et que $a \in \mathscr{F}_{\boldsymbol{\beta},\gamma}$, où

$$\mathscr{F}_{\boldsymbol{\beta},\gamma} = \left\{ x \in \mathscr{E}_{\boldsymbol{\beta},\gamma} \mid x_j > 0 \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}_n^* \right\}.$$

5. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}_n^* \quad \lambda \beta_j a_j = \alpha_j f_{\boldsymbol{\alpha}}(a).$$

6. Montrer que $\lambda = \frac{1}{\gamma} f_{\boldsymbol{\alpha}}(a) \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)$ et en déduire les coordonnées de a. Conclure.

Exercice 4 (ALGORITHME DE NEWTON, *6 points*). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Si $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$, on note $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leqslant r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$, ayant un zéro noté $a \in \mathbb{R}^n$ (vérifiant donc $\varphi(a) = 0$), et telle que $d\varphi(a)$ est inversible.

1. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\psi(x) = x - \left(d\varphi(a)\right)^{-1}(\varphi(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que ψ admet a pour point fixe et que $d\psi(a) = 0$.
2. Prouver l'existence de $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r)$ est stable par ψ et que ψ est contractante sur $\overline{B}(a,r)$.
3. Énoncer soigneusement le théorème, et en vérifier l'applicabilité, qui assure que a est l'unique point fixe de ψ dans $\overline{B}(a,r)$ et que, pour tout $x_0 \in \overline{B}(a,r)$, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \qquad\qquad u_0 = x_0 \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} = u_k - \left(d\varphi(a)\right)^{-1}(\varphi(u_k)). \end{cases}$$

   converge vers a.
4. Dans cette question, $n = 2$ et φ est donnée par :

$$\varphi : (x_1, x_2) \mapsto (3x_1^2 - 6x_2^3 + x_2, 4x_1^3 x_2 + x_1),$$

   et $a = (0,0)$. Vérifier que les questions précédentes s'appliquent dans ce cas.
5. Dans cette question, $n = 1$ et on suppose que φ est de classe $\mathscr{C}^2$. En utilisant une formule de Taylor d'ordre 2, montrer qu'il existe une constante M dépendant de a, r et des dérivées de φ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |u_{k+1} - a| \leqslant M |u_k - a|^2.$$

   En déduire par récurrence une majoration de $|u_k - a|$ en fonction de $|u_0 - a|$, de M et k.